Matematika vzorce

Ing. Petr Šídlo

verze 20050409

Obsah

1 Jazyk matematiky

1.1 Výrokový počet

1.1.1 Logické spojky

Logická operace	Zapisujeme	Čteme	Česky
negace	$\neg\alpha$	non α	není pravda, že α α není pravdivé α neplatí
disjunkce	$\alpha \vee \beta$	α vel β	α nebo β
konjunkce	$\alpha \wedge \beta$	α et β	α a β α a současně β
implikace	$\alpha \Rightarrow \beta$	α implikuje β	jestliže α, potom β α je dostačující podmínka pro β β je nutná podmínka pro α
ekvivalence	$\alpha \Leftrightarrow \beta$	α je ekvivalentní β	α právě tehdy, jestliže β α tehdy a jen tehdy, jestliže β α je nutná a postačující podmínka pro β

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0		1				
1		0				
0	0		0	0	1	1
0	1		1	0	1	0
1	0		1	0	0	0
1	1		1	1	1	1

1.1.2 Tautologie výrokového počtu

$\alpha \vee \neg\alpha$
$(\alpha \Rightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$
$\neg(\alpha \vee \beta) \Longleftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
$\neg(\alpha \wedge \beta) \Longleftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
$\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$
$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Longleftrightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$

1.2 Predikátový počet

1.2.1 Tautologie predikátového počtu

$$\forall_{x\in M}(\alpha(x)) \Longleftrightarrow \neg \exists_{x\in M} \neg(\alpha(x))$$
$$\exists_{x\in M}(\alpha(x)) \Longleftrightarrow \neg \forall_{x\in M} \neg(\alpha(x))$$
$$\forall_{x\in M} \neg(\alpha(x)) \Longleftrightarrow \neg \exists_{x\in M}(\alpha(x))$$
$$\exists_{x\in M} \neg(\alpha(x)) \Longleftrightarrow \neg \forall_{x\in M}(\alpha(x))$$

1.3 Množinové operace

sjednocení množin	$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$
průnik množin	$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$
rozdíl množin	$A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$
kartézký součin	$A \times B = \{[x, y]; x \in A \wedge y \in B\}$

2 Algebra

2.1 Mocniny a odmocniny

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r / a^s = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

2.2 Logaritmy

$$\log_z n = l$$

$$z^l = n$$

$$\log_z a^n = n \cdot \log_z a$$

$$\log_z (ab) = \log_z a + \log_z b$$

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$$

2.3 Komplexní čísla

$$z = a + bi$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

2.3.1 Moivreova věta

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

2.4 Posloupnosti

2.4.1 Aritmetická posloupnost

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

2.4.2 Geometrická posloupnost

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

2.5 Kombinatorika

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

3 Goniometrie

3.1 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi stejného úhlu

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

3.2 Funkce součtu a rozdílu dvou úhlů

$$\sin\alpha \pm \beta = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha \pm \beta = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

3.3 Funkce dvojnásobného a polovičního úhlu

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

3.4 Funkční hodnoty goniometrických funkcí

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\star$	0	$\star$	0
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\star$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\star$	0	$\star$

4 Analytická geometrie v rovině

4.1 Přímka

$$y = kx + q$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$Ax + By + C = 0$$

4.1.1 Rovnoběžné přímky

$$k_1 = k_2$$

4.1.2 Kolmé přímky

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

4.1.3 Parametrická rovnice přímky

$$\mathbf{s} = B - A$$

$$X = P + t\mathbf{s}$$

4.2 Kružnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

4.3 Elipsa

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

4.4 Hyperbola

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

4.5 Parabola

$$(x-m)^2 = 2p(y-n)$$

$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$

5 Matematická analýza

5.1 Základní pravidla pro výpočet limit

$$\lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x))$$

$$\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$$

$$\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x\to c} f(x)$$

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \left|\lim_{x\to c} f(x)\right|$$

5.2 Limity důležitých funkcí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \cdots + b_{m-1} n + a_m} &= \frac{a_0}{b_0} && \text{pro } k = m \\ &= 0 && \text{pro } k < m \\ &= \infty && \text{pro } k > m \wedge \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ &= -\infty && \text{pro } k > m \wedge \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} q^n &= \infty && \text{pro } q > 1 \\ &= 1 && \text{pro } q = 1 \\ &= 0 && \text{pro } q \in (-1; 1) \\ &= \text{neexistuje} && \text{pro } q \leq -1 \end{aligned}$$

5.3 L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{platí pro} \quad \begin{matrix} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{matrix}$$

5.4 Šikmé asymptoty

Funkce $y = f(x)$ má v ∞ šikmou asymptotu $y = kx+q$ pokud existují limity:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = q$$

6 Diferenciální počet

6.1 Základní pravidla pro derivování

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f[g])' = f'[g] \cdot g'$$

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

$$(f \cdot g)'''' = f''''g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg''''$$

6.2 Derivace elementárních funkcí

$(ax^n)' = nax^{n-1}$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(x)' = 1$	$(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$(a)' = 0$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\sinh x)' = \cosh x$

$$(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{x} \log \mathrm{e} \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\mathrm{tgh}\, x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\mathrm{cotgh}\, x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

6.3 Taylorův polynom

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

6.4 Wronského determinant

$$W(f_1, f_2, f_3, \cdots f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & f_3^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Pokud platí $W(f_1, f_2, f_3, \cdots f_n)(x) \neq 0$ je soustava rovnic lineárně nezávislá.

7 Integrální počet

7.1 Základní vzorce

$$\int 0\,\mathrm{d}x = \mathrm{C} \qquad \int 1\,\mathrm{d}x = x + \mathrm{C}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + \mathrm{C} \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{arccotg} x + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \mathrm{C}$$

Pro $\mathrm{a} \neq 1, \mathrm{a} > 0$

$$\int \mathrm{a}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln \mathrm{a}} + \mathrm{C}$$

Pro $n \in \mathcal{N}$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$$

Pro $x \in (-1, 1)$ platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\arccos x + \mathrm{C}$$

Na každém intervalu neobsahující body $x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$,
resp. $x_n = n\pi$, kde $n \in \mathcal{Z}$, je

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + \mathrm{C}$$

Pro $x > \alpha$ a $\alpha \in \mathcal{R}$, $\alpha \neq -1$ je

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{C}$$

Pro $x \in (0, +\infty)$, resp. pro $x \in (-\infty, 0)$ je

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \mathrm{C}$$

7.2 Integrační metoda per partes

$$\int f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x$$

$$\int f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

7.3 Integrace substitucí

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\, g'(x)$$

$$\int \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' \mathrm{d}x = f\big(g(x)\big) = \int f'\big(g(x)\big)\, g'(x)\, \mathrm{d}x$$

$y = g(x)$ $\qquad$ $dy = g'(x)\, \mathrm{d}x$

$x = g_{-1}(y)$ $\qquad$ $\mathrm{d}x = g'_{-1}(y)\, dy$

Zužující substituce

$$\int f'\big(g(x)\big)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \int f'(y)\, dy = f(y) = f\big(g(x)\big)$$

Rozšiřující substituce

$$\int f'(y)\, dy = \int f'\big(g(x)\big)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = f'\big(g(x)\big) = f(y)$$

Kombinovaná substituce

$$\int f'\big(g(x)\big)\, \mathrm{d}x = \int f'(y)\, g'_{-1}(y)\, dy$$

7.4 Integrály racionálních funkcí

$$\int \frac{1}{x+\mathrm{a}}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\mathrm{a}| + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{2x+\mathrm{b}}{x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{(x+\mathrm{a})^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-n)(x+\mathrm{a})^{n-1}} + \mathrm{C}$$

Pro $n > 1$

$$\int \frac{2x+\mathrm{b}}{(x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c})^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(-n+1)(x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c})^{n-1}} + \mathrm{C}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$ – dále neřešit, považovat za výsledek

Jmenovatel má dva různé reálné kořeny

$$\int \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{x^2+\mathrm{p}x+\mathrm{q}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\gamma + \delta = \mathrm{A}$$
$$-\beta\gamma - \alpha\delta = \mathrm{B}$$

$$= \int \left(\frac{\gamma}{x-\alpha} + \frac{\delta}{x-\beta}\right)\mathrm{d}x = \gamma \ln|x-\alpha| + \delta \ln|x-\beta| + \mathrm{C}$$

Jmenovatel má jeden dvojnásobný reálný kořen

$$\int \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{x^2+\mathrm{p}x+\mathrm{q}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{(x-\alpha)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$x - \alpha = y$$
$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$$
$$x = y + \alpha$$

$$= \int \frac{\mathrm{A}(y+\alpha)+\mathrm{B}}{y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{A}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + (\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \mathrm{A}\ln|x-\alpha| - \frac{\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{x-\alpha} + \mathrm{C}$$

Jmenovatel nemá reálné kořeny

$$\int \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{x^2+\mathrm{p}x+\mathrm{q}}\,\mathrm{d}x =$$

$$x^2+\mathrm{p}x+\mathrm{q} = (x+\tfrac{\mathrm{p}}{2})^2 + (\mathrm{q}-\tfrac{\mathrm{p}^2}{4})$$
$$(\mathrm{q}-\tfrac{\mathrm{p}^2}{4}) = \varrho$$
$$x^2+\mathrm{p}x+\mathrm{q} = (x+\tfrac{\mathrm{p}}{2})^2 + \varrho$$
$$x+\mathrm{p} = y$$
$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$$

$$= \int \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{(x+\frac{\mathrm{p}}{2})^2+\varrho}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{A}(y-\frac{\mathrm{p}}{2})+\mathrm{B}}{y^2+\varrho}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \mathrm{A}\int \frac{y}{y^2+\varrho}\,\mathrm{d}y + (\mathrm{B}-\mathrm{A}\tfrac{\mathrm{p}}{2})\int \frac{1}{y^2+\varrho}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{\mathrm{A}}{2}\ln(x^2+\mathrm{p}x+\mathrm{q}) + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}\frac{\mathrm{p}}{2}}{\sqrt{\varrho}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{\mathrm{p}}{2}}{\sqrt{\varrho}}$$

7.5 Simpsonova formule

$$h = \frac{(b-a)}{2n}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+f(x_{2n})\Big]$$

7.6 Geometrické aplikace

7.6.1 Délka grafu hladké funkce

$$d\big(f,\langle a,b\rangle\big) = \int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$$

7.6.2 Objem tělesa vytvořeného rotací grafu

$$V\big(f,\langle a,b\rangle\big) = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

7.6.3 Plášť tělesa vytvořeného rotací grafu

$$S\big(f,\langle a,b\rangle\big) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$$